**Приложение 1 к РПД**
**Высшая математика**
**09.03.01 Информатика и вычислительная техника**
**направленность (профиль)**
**Технологии разработки мобильных приложений**
**Форма обучения – очная**
**Год набора – 2021**

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
# ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Кафедра | Математики, физики и информационных технологий |
| 2. | Направление подготовки | 09.03.01 Информатика и вычислительная техника |
| 3. | Направленность (профиль) | Технологии разработки мобильных приложений |
| 4. | Дисциплина (модуль) | Б1.О.13.01 Высшая математика |
| 5. | Форма обучения | Очная |
| 6. | Год набора | 2021 |

## I. Методические рекомендации

### 1.1 Методические рекомендации по организации работы студентов во время проведения лекционных занятий

- В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы, дает рекомендации для практического занятия и указания для выполнения самостоятельной работы.
- В ходе лекционных занятий обучающемуся необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание изучаемой дисциплины, научные выводы и практические рекомендации, положительный опыт в ораторском искусстве.
- Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки, подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Рекомендуется активно задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

### 1.2 Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

- На практическом занятии студенты решают задачи под руководством преподавателя. Семинар проводится по узловым и наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной программы.
- Практические занятия посвящены изучению наиболее важных тем учебной дисциплины. Они служат для закрепления изученного материала, развития умений и навыков подготовки докладов, сообщений, приобретения опыта устных публичных выступлений, ведения дискуссии, аргументации и защиты выдвигаемых положений, а также для контроля преподавателем степени подготовленности студентов по изучаемой дисциплине.
- В ходе подготовки к практическим занятиям следует изучить основную и дополнительную литературу, учесть рекомендации преподавателя и требования рабочей программы.
- Можно подготовить свой конспект ответов по рассматриваемой тематике, подготовить тезисы для выступлений по всем учебным вопросам, выносимым на занятие. Следует продумать примеры с целью обеспечения тесной связи изучаемой теории с реальной практикой. Можно дополнить список рекомендованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы.

### 1.3 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

- Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).
- Самостоятельная работа студентов (далее – СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. СРС играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

- К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом СРС играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.
- В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.
- Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:
  - изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
  - подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
  - участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.
- Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.
- Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях.

**Чтение учебника**

- Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего, производя на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.
- Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.
- Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно добиваться точного представления о том, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схемы доказательств сложных теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.
- При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.
- Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит студента к необходимому в работе порядку, но и позволит ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
- Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы курса. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

**Самопроверка**

- После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем. Вопросы для самопроверки, приведенные в настоящем пособии, даны с целью помочь студенту в повторении, закреплении и проверке прочности усвоения изученного материала. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.
- Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

### I.4. Проведение занятий в интерактивной форме

- Интерактивное обучение представляет собой способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности обучающихся, т.е. все участники образовательного процесса взаимодействуют друг с другом, совместно решают поставленные проблемы, моделируют ситуации, обмениваются

информацией, оценивают действие коллег и свое собственное поведение, погружаются в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем.
– Интерактивная форма обучения реализуется в виде коллективных решений творческих задач (кейс-заданий по тематикам дисциплины).
– Коллективные решения творческих задач. Под творческими заданиями понимаются такие учебные задания, которые требуют от обучающихся не простого воспроизводства информации, а творчества, поскольку задания содержат больший или меньший элемент неизвестности и имеют несколько подходов, несколько методов решения.

**I.5. Методические рекомендации по решению тестовых заданий**
– Тестовая система предусматривает вопросы/задания, на которые обучающийся должен дать один или несколько вариантов правильного ответа из предложенного списка ответов. При поиске ответа необходимо проявлять внимательность.
– При отсутствии какого–либо одного ответа на вопрос, предусматривающий множественный выбор, весь ответ считается неправильным.
– Ответы правильные выделяются в тесте подчеркиванием или любым другим допустимым символом.

**I.6. Методические рекомендации по решению задач, в том числе дополнительных**
– Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.
– При решении задач нужно обосновать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать из них самый лучший. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения.
– Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.
– Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа $\pi$ и т. п.
– Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Если, например, решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно, прежде всего, проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.
– Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.
– Перед решением задачи должно быть полностью приведено ее условие. Само решение следует сопровождать необходимыми расчетами и пояснениями с указанием применяемых формул, анализом и выводами.
– Работа должна быть оформлена аккуратно, написана разборчиво без помарок, зачеркиваний и сокращений слов.

**I.7. Методические указания по подготовке к решению кейсов – практических ситуаций**
– Кейс (в переводе с англ. – случай) представляет собой проблемную ситуацию, предлагаемую студентам в качестве задачи для анализа и поиска решения. Обычно кейс содержит схематическое словесное описание ситуации, статистические данные, а также мнения и суждения о ситуациях, которые трудно предсказать или измерить. Кейс, охватывает такие виды речевой деятельности как чтение, говорение и письмо.
– Кейсы наглядно демонстрируют, как на практике применяется теоретический материал. Данный материал необходим для обсуждения предлагаемых тем, направленных на развитие навыков общения и повышения профессиональной компетенции. Зачастую в кейсах нет ясного решения проблемы и достаточного количества информации.
– Анализ кейса должен осуществляться в определенной последовательности:
  - Выделение проблемы.
  - Поиск фактов по данной проблеме.
  - Рассмотрение альтернативных решений.
  - Выбор обоснованного решения.

### I.8. Методические рекомендации по выполнению домашних и индивидуальных заданий

- Домашние/индивидуальные задания по курсу выполняются обучающимися самостоятельно в отдельной тетради или в тетради для практических занятий.
- Домашние/индивидуальные задания ориентированы на закрепление теоретического материала, изученного в ходе лекционного занятия и отработанного на практических занятиях по каждой теме курса.
- При выполнении домашнего/индивидуального задания обучающийся должен повторить теоретический материал лекции по данной теме; разобрать задания, выполненные на практическом занятии; записать условие задания в тетрадь; полно и с обоснованием действий выполнить решение заданий; при необходимости привести необходимые уточнения (формулы, теоремы, утверждения), на основе которых проводилось решение; записать ответ или вывод.
- Все индивидуальные задания необходимо защитить в устной форме, ответив на вопросы преподавателя по выполнению заданий и обоснованию приведенного решения.

### I.9. Методические рекомендации по выполнению контрольных работ

- Контрольные работы по данной дисциплине выполняются в отдельных тетрадях для контрольных работ или на отдельных листах, которых хранятся у преподавателя; в них же обучающийся выполняет работу над допущенными ошибками в случае неудовлетворительного выполнения контрольной работы или дополнительное задание для допуска к пересдаче контрольной работы.
- Контрольная работа считается зачтенной, если правильно выполнено не менее 60% заданий.
- Задания контрольной работы выполняются аккуратно, последовательно, обоснование решения и ответ обязательны в каждом задании.
- При написании работы можно использовать черновик.
- При выполнении контрольных работ не допускается использование мобильных устройств, гаджетов, калькуляторов, учебной литературы.

### I.10. Методические рекомендации по подготовке к сдаче коллоквиума

- Коллоквиум проводится по теоретической части курса и состоит из нескольких этапов.
- 1 Этап. Устный опрос по определениям.
- Все определения необходимо знать наизусть. Каждое верно сформулированное определение – 1 балл. Необходимо набрать максимум – 3 балла, минимум – 2 балла.
- Если обучающийся не справился с данным этапом, то продолжает осваивать учебную дисциплину самостоятельно до следующей попытки. Баллы (2 или 3), полученные за первый этап, могут сохраняться до следующей пересдачи коллоквиума.
- 2 Этап. Устный вопрос с развернутым ответом. При подготовке к ответу на вопрос (в течение 20 минут) считается допустимым использование собственноручно написанного конспекта, записей. Использование иных материалов и технических средств является нарушением правил и достаточным условием для того, чтобы коллоквиум считать не сданным и обучающийся продолжает осваивать дисциплину самостоятельно до следующей попытки.
- Во время ответа преподавателю обучающийся может вести какие-либо записи на чистом листе бумаги.
- Максимальное количество баллов за ответ на вопрос обучающийся получает, если даны все определения, сформулированы и доказаны утверждения, приведены примеры и контрпримеры, и минимальное – если даны все определения, сформулированы утверждения, доказательства приведены, но только на уровне идеи.

### I.11. Методические рекомендации по выполнению итогового (экзаменационного) теста

- Итоговый (экзаменационный) тест проводится в виде компьютерного тестирования.
- Для успешного прохождения итогового теста обучающиеся в режиме самоподготовки выполняют задания подготовительных тестов.
- Сложные задания, встречаемые в тестах, студенты могут выполнять на групповых и индивидуальных консультациях по предмету.
- Перед прохождением теста обучающийся должен повторить весь теоретический и практический материал курса, выучить основные формулы, определения, утверждения и теоремы, знать способы и методы решения ключевых заданий курса.

### I.12. Методические рекомендации по подготовке к сдаче экзамена

- Экзамен осуществляется в рамках завершения изучения дисциплины (модуля) и позволяет определить качество усвоения изученного материала, а также степень сформированности компетенций.
- Студенты обязаны сдавать экзамен в строгом соответствии с утвержденными учебными планами, разработанными согласно образовательным стандартам высшего образования.

– По дисциплине экзамен принимается по билетам, содержащим два теоретических вопроса. Экзаменационные билеты утверждаются на заседании кафедры.
– Экзаменатору предоставляется право задавать студентам вопросы в рамках билета, а также, помимо теоретических вопросов, предлагать задачи практико-ориентированной направленности по программе данного курса.
– При явке на экзамен студенты обязаны иметь при себе зачетную книжку, которую они предъявляют экзаменатору в начале экзамена.
– Рекомендуется при подготовке к экзамену опираться на следующий план:
    1. Просмотреть программу курса, с целью выявления наиболее проблемных тем, вопросов, которые могут вызвать трудности при подготовке к экзамену.
    2. Темы необходимо изучать последовательно, внимательно обращая внимание на описание вопросов, которые раскрывают ее содержание. Начинать необходимо с первой темы.
    3. После работы над первой темой необходимо ответить на вопросы для самоконтроля и решить тестовые задания к ней. При этом для эффективного закрепления информации прорешать тест первый раз лучше без использования учебных материалов, второй раз с их использованием.
    4. И так далее по остальным темам.

## II. Планы практических занятий

**Тема 1. Линейная алгебра**
**План**
1. Матрицы. Операции над матрицами. Обратная матрица.
2. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы, его вычисление.
3. Определители второго и третьего порядка. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определители n-го порядка. Свойства определителей. Методы вычисления определителей.
5. Системы линейных уравнений. Применение матриц и определителей к решению систем линейных алгебраических уравнений.
6. Теорема Кронекера – Капели. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
7. Решение однородных систем уравнений.
8. Формулы Крамера.

**Литература:** [1, с. 13-73]; [3, с. 3-29]; [5, с. 7-90].

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

I подзадача. Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+3y=7 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x+y=8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 3x+5y=-9 \end{cases}$

II подзадача. Представить системы уравнений в матричной форме:

4. $\begin{cases} x+3y+2z=5 \\ 2x+4y-2z=8 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x-2y+4z=11 \\ 3x+2y+3z=8 \\ 2x+5z=11 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x+3y+2z=1 \\ 3x+2y+3z=-1 \\ 2x+7y+4z=-2 \end{cases}$

III подзадача. Решить системы уравнений каждым из известных методов решения:

7. $\begin{cases} x-2y+4z=0 \\ 3x-2y+5z=5 \\ 2x-4y+5z=-3 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+3y+2z=5 \\ 2x+4y+3z=9 \\ 3x+2y+z=7 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x+3y+2z=4 \\ 3x+5y+2z=4 \\ 2x+3y+4z=-6 \end{cases}$

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Дать определение матрицы.
2. Перечислить виды матриц.
3. Какие операции выполнимы над матрицами?
4. Перечислить элементарные преобразования матриц.
5. В каком случае выполнима операция умножения двух матриц?
6. Какими способами можно вычислить определить третьего порядка?
7. Перечислите основные свойства определителей.

8. Назовите условие существования обратной матрицы.
9. Перечислите способы решения систем линейных уравнений.
10. При каком условии можно решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы?

**Задания для самостоятельной работы:**

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} a & -1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 12 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & -4 & 3 \\ 8 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Найти *x* из уравнений:

19. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 20. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

21. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти: а) A+B, б) 2A, в) 2A+3B, г) 2B-A, д) AB, е) $A^2+3E$, ж) AB-BA.

22. Даны матрицы: A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти: а) 5A-B; б) 3A′-2B; в) AB.

Найти произведение матриц:

23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}(3\ \ 2\ \ 1)$

25. Вычислить матрицу $D = (AB)' - C^2$, где

A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

26. Даны матрицы A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти: а) $A^2+2B-3E$; б) AB-BA;

в) $(A-2B)^2$; г) $A^2-B^2$; д) (A-B)(A+B).

27. Найти произведение матриц ABC-3E, где

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, C=(2 0 5), E – единичная матрица.

28. Вычислить A², если A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

29. Найти произведение матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 9 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти обратные матрицы для следующих матриц:

30. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ 31. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ 32. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ 33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 35. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 36 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ 37. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**Тема 2. Векторная алгебра**
**План**
1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Линейные операции над векторами.
3. Проекция вектора на ось, ее свойства.
4. Линейная зависимость векторов. Базис.
5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, приложения.

**Литература:** [1, с. 78-124]; [3, с. 30-66]; [5, с. 91-117].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Назовите линейные операции над векторами.
2. Записать формулу разложения вектора по ортам координатных осей.
3. Как найти координаты вектора?
4. Записать формулу нахождения длины вектора.
5. Каково условие коллинеарности векторов?
6. Приложения скалярного произведения.
7. Как найти площадь параллелограмма, зная координаты его вершин?
8. Перечислите основные задачи на применение смешанного произведения.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**
Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ .
I подзадача. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ .

II подзадача. Найти скалярное произведение (3 $\vec{a}$ - 2 $\vec{b}$ )·(5 $\vec{a}$ - 6 $\vec{b}$ ), если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi / 3$.

III подзадача. При каком *m* векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

**Задания для самостоятельной работы:**
– Пример 1. Найдите угол между векторами $a = 2m + 4n$ и $b = m - n$, где $m$ и $n$ – единичные векторы и угол между $m$ и $n$ равен $120^{o}$.
– Пример 2. Зная векторы $AB$ (-3, -2, 6) и $BC$ (-2, 4, 4), вычислите длину высоты $AD$ треугольника $ABC$.

**Тема 3. Аналитическая геометрия на плоскости**
**План**
1. Метод координат на плоскости
2. Полярная система координат.
3. Основы аналитической геометрии на плоскости.
4. Уравнения прямой на плоскости.
5. Прямые на плоскости. Основные задачи.
6. Кривые второго порядка. Основные понятия.
7. Окружность. Эллипс.
8. Гипербола. Парабола.

**Литература:** [1, с. 128-181]; [2, с. 34-75, 76-101]; [3, с. 67-73, 92-106]; [5, с. 146-169].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Записать формулы взаимосвязи прямоугольных и полярных координат.
2. Основные задачи метода координат на плоскости. Основные приложения.
3. Записать уравнения прямой на плоскости.
4. Как находится угол между прямыми?
5. Записать условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
6. Записать уравнение окружности.
7. Записать каноническое уравнение эллипса.
8. Исследовать форму гиперболы по ее уравнению.
9. Записать уравнения асимптот гиперболы.
10. Дать определение параболы, записать ее каноническое уравнение.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**
Даны две точки: $A\left(5;-3\right);\, B\left(-1;6\right)$.
I подзадача. Составить общее уравнение прямой, проходящей через эти точки.
II подзадача. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через эти две точки.
III подзадача. Составить для полученной прямой уравнение в отрезках.
IV подзадача. Найти координаты середины отрезка $AB$.
V подзадача. Найти длину отрезка $AB$.

**Задания для самостоятельной работы:**
- Пример 1. Проходит ли прямая линия, заданная уравнением $3x-4y+11=0$, через точки с координатами: $\left(3;5\right);\left(-1;2\right)$.
- Пример 2. Линия на плоскости задана уравнением $9x-4y=0$. Найти точки пересечения этой линии с осями координат.
- Пример 3. Записать уравнение прямой, образующей с положительным направлением оси *Ox* угол в $30^\circ$ и пересекающей ось *Oy* в точке $\left(0;-4\right)$.
- Пример 4. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $A\left(5;-3\right);\, B\left(-1;6\right)$.
- Пример 5. Дана прямая $2x+3y-6=0$. Составить для нее уравнение в отрезках.
- Пример 6. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- Пример 7. Зная уравнение асимптот гиперболы $y = \pm 0{,}5x$ и одну из ее точек $M(12, 3\sqrt{3})$, составить уравнение гиперболы.
- Пример 8. Линия на плоскости задана уравнением $x^2+y^2-12x+16y=0$. Найти точки пересечения этой линии с осями координат.
- Пример 9. Найти координаты центра и радиус окружности: $x^2+y^2-4x+8y-16=0$.

**Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве**
**План**
1. Уравнение плоскости. Плоскости и прямые в пространстве, поверхности в пространстве.
2. Метрические задачи, связанные с плоскостями.
3. Взаимное расположение двух и трех плоскостей.
4. Уравнение прямой в пространстве.
5. Взаимное расположение прямой и плоскости.

6. Взаимное расположение двух прямых.
7. Уравнение поверхности.
8. Различные виды уравнения прямой в пространстве.
9. Задачи, относящиеся к плоскостям, прямым в пространстве.

**Литература:** [1, с. 186-226]; [3, с. 74-91]; [5, с. 172-222].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Записать различные уравнения плоскости.
2. Записать различные уравнения прямой в пространстве.
3. Записать уравнение сферы.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**
Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.
I подзадача. Найти длину ребра $A_1A_2$.
II подзадача. Найти угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$.
III подзадача. Найти угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$.
IV подзадача. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.
V подзадача. Найти объем пирамиды.
VI подзадача. Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

**Задания для самостоятельной работы:**
- Пример 1. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка A(1,-1,3) служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.
- Пример 2. Составьте канонические уравнения прямой: $5x + y + z = 0$, $2x + 3y – 2z + 5=0$.
- Пример 3. Найти каноническое уравнение, если прямая задана в виде: $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$

**Тема 5. Введение в математический анализ**

**План**
1. Множество. Операции над множествами. Отображения множеств и их виды.
2. Вещественные числа. Свойство полноты множества вещественных чисел.
3. Леммы об отделимости множеств, о системе вложенных отрезков и последовательности стягивающихся отрезков.
4. Метод математической индукции. Бином Ньютона и неравенство Бернулли.
5. Функции.
6. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
7. Теоремы о пределах суммы, разности, произведения, частного. Предельный переход в неравенствах.
8. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число «е» и постоянная Эйлера.
9. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной последовательности.
10. Критерий Коши для сходимости последовательности.
11. Понятие предела числовой функции (определения отображения, функции, проколотой δ- окрестности, предела по Коши и по Гейне).
12. База множеств. Предел функции по базе. Свойства пределов функции по базе. Критерий Коши существования предела функции по базе.
13. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне. Теоремы о пределе сложной функции. Порядок бесконечно малой функции.
14. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность функций $y=a^x$, $y=sinx$.
15. Непрерывность элементарных функций.
16. Замечательные пределы.
17. Непрерывность функции на множестве (определения функции, непрерывной на множестве, на отрезке, неубывающей, невозрастающей, строго возрастающей, строго убывающей, монотонной функции, определение точек разрыва, теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке)).
18. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке (теорема об обращении функции в нуль, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией точных верхней и нижней граней).
19. Понятие равномерной непрерывности.

**Литература:** [1, с. 4-34]; [2, с. 16-42, 92-135]; [4, с. 9-95]; [5, ч. 1, с. 12-154]; [6, с. 98-144]; [8, с. 9-74].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Сформулируйте определение предела последовательности.
2. Могут ли члены последовательности быть равными ее пределу?
3. Может ли одна и та же последовательность иметь два различных предела?
4. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.
5. Может ли неограниченная последовательность иметь предел?
6. Сформулируйте определение бесконечно малой последовательности.
7. Сформулируйте и докажите теоремы о сумме бесконечно малых последовательностей и о произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую.
8. Какие последовательности называются эквивалентными?
9. Какую теорему можно использовать при вычислении предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-n+4}{2n^2+n-4}$?
10. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.
11. Может ли бесконечно большая последовательность быть ограниченной?
12. Какие последовательности называются монотонными?
13. Чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$?
14. Что используется при обосновании существования этого предела?
15. Сформулируйте определение предела функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$.
16. Сформулируйте определение ограниченности функции $f(x)$ на *E*, при $x\to+\infty$, при $x\to-\infty$, при $x\to\infty$.
17. Сформулируйте определения асимптот графика функции правой, левой, двусторонней, наклонной, горизонтальной.
18. Сформулируйте определения пределов функции $f(x)$ в точке $x_0$ односторонних (слева и справа) и двустороннего.
19. Как связаны односторонние и двусторонний пределы?
20. Существует ли $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$?
21. Сформулируйте теоремы о переходе к пределу в неравенствах и о пределе промежуточной функции.
22. Какие пределы называют замечательными?
23. Сформулируйте определения бесконечно большой функции, бесконечно большой положительной, бесконечно большой отрицательной.
24. Чем отличается конечный и бесконечный пределы функции?
25. Как связано существование $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ с существованием $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$?
26. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты функции. Охарактеризуйте поведение графика функции вблизи вертикальной асимптоты.
27. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке и условия непрерывности.
28. Может ли функция, непрерывная в точке, не иметь предела в этой точке?
29. Может ли функция, не определенная в некоторой точке, быть непрерывной в этой точке?
30. Перечислите виды точек разрыва и соответствующие им условия.
31. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.
32. Какие функции называются элементарными? С помощью каких теорем устанавливается их непрерывность?
33. Может ли функция $f(x)$ быть положительной в точке $x_0$ и отрицательной во всех остальных точках ее области определения.
34. Следует ли из непрерывности функции в точке непрерывность функции в этой точке слева и справа? Верно ли обратное?
35. Сформулируйте определение функции, непрерывной на отрезке.
36. Перечислите свойства функций, непрерывных на отрезке.
37. Сформулируйте определения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
38. Изложите суть метода половинного деления для решения уравнения.
39. Сформулируйте определение бесконечно малой функции. Что оно означает на языке «$\varepsilon-\delta$?
40. В чем заключается локальный характер бесконечной малости?
41. Что можно сказать о произведении бесконечно малой функции на ограниченную?
42. Сформулируйте теорему о виде представления функции, имеющей предел.
43. Сформулируйте теоремы о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.
44. Как сравнивают бесконечно малые функции?

45. Что означает символ $o$ («о» маленькое)?
46. Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?
47. Как используются эквивалентные бесконечно малые функции при вычислении пределов?
48. Что можно сказать о разности двух эквивалентных бесконечно малых функций?
49. Какие формулы называются асимптотическими?
50. Как используются асимптотические формулы при вычислении пределов?

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача.** Дана функция $f(x)=\begin{cases} x & при\ x\le 1 \\ 2 & при\ x>1 \end{cases}$.

**I подзадача.** Доказать, что функция не является непрерывной в точке $x_0=1$.

**II подзадача.** Доказать, что функция непрерывна слева в этой точке.

**III подзадача.** Построить график функции $f(x)$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Найти область определения функций: $f(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)(x-5)}+\log_2(x-1)$, $f(x)=\sqrt{x-6}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$.
2. Найти сложные функции $f\circ g$ и $g\circ f$, если $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{x}$.
3. Построить график функции $f(x)=x^2+2x$ и записать свойства функции.
4. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x-2x^2}{x^3+3}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{5x}$, в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 8x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{9x^2+4x-1}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4}{9x^2-2x}$, ж) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{10}{x^2-25}\right)$, з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8+2x-x^3}{x^4+3}$, и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{3x}$, к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 4x}$.

**Тема 6. Дифференциальное исчисление функции одной переменной**

**План**

1. Приращение функции. Дифференциал и производная функции.
2. Геометрический и механический смысл производной.
3. Связь понятий дифференцируемости и непрерывности функции.
4. Односторонние производные. Дифференцирование сложной функции.
5. Теорема о производной обратной функции, теорема об инвариантности формы первого дифференциала.
6. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.
7. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
8. Дифференциалы высших порядков.
9. Производная функции, заданной параметрически.
10. Производная функции, заданной неявно.
11. Возрастание и убывание функции в точке. Локальные экстремумы. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа.
12. Следствия из теоремы Лагранжа.
13. Точки несобственного локального экстремума, теорема Ферма, теорема об обращении в нуль производной, теорема о невозможности для производной иметь точки разрыва первого рода, следствие (теорема Дарбу), бесконечные производные.
14. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
15. Локальная формула Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме.
16. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям.
17. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки.
18. Достаточные условия достижения функцией локального экстремума в заданной точке.
19. Выпуклость. Условия выпуклости функции. Точки перегиба. Условия перегиба.
20. Общая схема построения графика функции. Интерполирование.

**Литература:** [1, с. 43-87]; [2, с. 136-204]; [4, с. 96-151]; [5, ч. 1, с. 155-281]; [6, с. 145-195]; [8, с. 75-144].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

2. Сформулируйте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 2x$ в точке $M_0(1; 3)$.
4. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии существования производной в заданной точке.
5. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x_0$. Что можно сказать о существовании производной у функции $F(x) = f(x) + g(x)$ в точке $x_0$?
6. Сформулируйте определение дифференцируемости функции в точке $x_0$.
7. Что называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в заданной точке $x_0$?
8. Будет ли функция $y = |x|$ дифференцируемой функцией для всех $x \in (-\infty; +\infty)$?
9. Можно ли утверждать, что дифференцируемая на интервале $(a, b)$ функция непрерывна на этом интервале? Верно ли обратное утверждение?
10. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.
11. Сформулируйте и докажите теорему о существовании производной функции, заданной в параметрическом виде.
12. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.
13. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.
14. Сформулируйте и докажите теорему Коши.
15. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя.
16. Сформулируйте и докажите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
17. Сформулируйте и докажите теорему Пеано.
18. Сформулируйте определение строго возрастающей функции на отрезке $[a, b]$.
19. Какая точка $x_0$ называется точкой роста функции $f(x)$?
20. Сформулируйте и докажите необходимое условие монотонности на отрезке $[a, b]$.
21. Сформулируйте и докажите достаточное условие строгой монотонности на отрезке $[a, b]$.
22. Следует ли из монотонности дифференцируемой функции монотонность ее производной?
23. Сформулируйте определение точек экстремума функций.
24. Сформулируйте и докажите необходимое условие экстремума.
25. Сформулируйте и докажите достаточные условия экстремума по первой производной.
26. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости кривой на $(a, b)$.
27. Какая точка называется точкой перегиба графика функции?
28. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба.
29. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача.** Дана функция $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

**I подзадача.** Найти область определения функции $f(x)$.

**II подзадача.** Найти интервалы выпуклости функции $f(x)$.

**III подзадача.** Найти точки перегиба функции $f(x)$.

**IV подзадача.** Построить график функции $f(x)$.

**Задания для самостоятельной работы:**

**1.** Найти производную $y = \dfrac{4x+1}{16x^2+8x+3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} arctg \dfrac{4x+1}{\sqrt{2}}$.

**2.** Найти производную $y = 2\arcsin \dfrac{2}{3x+4} + \sqrt{9x^2+24x+12}$.

**3.** Найти производную $y = \dfrac{1}{\sin\alpha} \ln(tgx + ctg\alpha)$.

**4.** Найти производную $y'_x$ $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tg\sqrt{1+t}. \end{cases}$

**5.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

**6.** Найти производную $n$ -го порядка $y = a^{3x}$.

**7.** Найти производную пятого порядка $y = (2x^2 - 7)\ln(x-1)$.

**8.** Найти производную второго порядка $y''_{xx}$ от функции , заданной параметрически $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$

**9.** Показать, что функция $y$ удовлетворяет данному уравнению $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$.

**Тема 7. Неопределенный интеграл**
**План**

1. Точная первообразная. Интегрируемые функции.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Основные методы интегрирования (замена переменной интегрирования, интегрирование по частям).
4. Таблица интегралов (с доказательствами).
5. Интегрирование дробно-рациональных функций (выделение правильной рациональной дроби, разложение правильной рациональной дроби на простейшие, метод неопределенных коэффициентов, интегрирование правильных рациональных дробей).
6. Метод Остроградского. Интегрирование дробно-рациональных функций (интегрирование простейших рациональных дробей вида I – IV, реккурентная формула).
7. Интегрирование тригонометрических выражений и выражений вида $R\left(e^x\right)$.
8. Интегрирование иррациональных выражений.

**Литература:** [1, с. 88-105]; [2, с. 205-222]; [4, с. 156-172]; [5, ч. 2, с. 8-163]; [6, с. 196-213]; [7, с. 4-32].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Дать определение первообразной функции. Привести примеры.
2. Каково условие существования у функции первообразной на заданном интервале?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. В чем состоит смысл действия интегрирования?
5. Почему при интегрировании появляется произвольная постоянная?
6. В чем состоит метод непосредственного интегрирования.
7. При каких условиях справедлива формула замены переменной в неопределенном интеграле?
8. При каких условиях справедлива формула интегрирования по частям?
9. В чем суть метода неопределенных коэффициентов, используемого интегрировании рациональных дробей?
10. В чем суть метода частных значений, используемого интегрировании рациональных дробей?

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача.** Вычислить интеграл $\int\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$ различными способами.

**I подзадача.** Используя тригонометрическую подстановку.

$$\int\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\sqrt{3^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} x = 3\sin t; & dx = 3\cos t\,dt; \\ \sin t = \frac{x}{3}; & t = \arcsin\frac{x}{3}; \end{matrix}\right\} = \int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int 3\underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t = 9\int\cos^2 t\,dt = 9\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left(\int dt + \int\cos 2t\,dt\right) = \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin 2t + C =$$

$$=\left\{\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{9-x^2}{9}} = \frac{2x}{3\cdot 3}\sqrt{9-x^2} = \frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2}\right\} =$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\cdot\frac{2x}{9}\sqrt{9-x^2}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+C.$$

**II подзадача.** Используя интегрирование по частям.

$$\int \underbrace{\sqrt{9-x^2}}_{u}\,\mathrm{d}\underbrace{x}_{v} = x\sqrt{9-x^2}-\int x d\sqrt{9-x^2} = x\sqrt{9-x^2}-\int x\left(-\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}\right)=$$

$$\left\{d(9-x^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(9-x^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2x)dx\right\}$$

$$=x\sqrt{9-x^2}-\int\frac{-x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=x\sqrt{9-x^2}-\int\frac{9-x^2-9}{\sqrt{9-x^2}}dx=x\sqrt{9-x^2}-\int\left(\frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{9}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=$$

$$=x\sqrt{9-x^2}-\int\sqrt{9-x^2}dx+9\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=x\sqrt{9-x^2}-\underline{\int\sqrt{9-x^2}dx}+9\arcsin\frac{x}{3}\Rightarrow$$

$$2\int\sqrt{9-x^2}dx=x\sqrt{9-x^2}+9\arcsin\frac{x}{3}+C\Rightarrow\ \int\sqrt{9-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C.$$

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Вычислить $\int x^2\cdot\cos xdx$
2. Вычислить $\int(2\cdot x+3)\cdot\cos xdx$
3. Вычислить $\int x\cdot\ln xdx$
4. Вычислить $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
5. Вычислить $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$
6. Вычислить $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+16}$
7. Вычислить $\int xe^x dx$
8. Вычислить $\int x^2\cos xdx$
9. Вычислить $\int x\sin xdx$
10. Вычислить $\int e^x\sin xdx$
11. Вычислить $\int x^3e^x dx$
12. Вычислить интеграл $\int\sqrt{16-x^2}dx$ различными способами.

**Тема 8. Определенный интеграл**

**План**

1. Определение интеграла Римана (неразмеченное разбиение, его свойства, диаметр разбиения, размеченное разбиение, интегральная сумма, определение интеграла Римана, определение функции интегрируемой по Риману, единственность интеграла Римана, интеграл Римана как предел по некоторой базе, ограниченность интегрируемой по Риману функции).
2. Критерий интегрируемости функций по Риману (определения сумм Дарбу, верхнего и нижнего интегралов, леммы 1-6, критерий и его доказательство, примеры про функции Дирихле и Римана).
3. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману.
4. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману. Следствие из него.
5. Метод интегральных сумм.
6. Классы функций интегрируемых по Риману.
7. Свойства определенного интеграла. Теорема об интегрируемости сложной функции.
8. Аддитивность интеграла Римана (теорема, следствие из нее).

9. Интеграл Римана как функция от его верхнего (нижнего) предела интегрирования.
10. Производная интеграла. Теорема Ньютона – Лейбница.
11. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
12. Теоремы о среднем значении интеграла.
13. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
14. Методы вычисления определенного интеграла.
15. Первая и вторая теоремы о среднем значении.
16. Определение несобственных интегралов первого и второго рода.
17. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов.
18. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
19. Признаки Абеля и Дирихле.
20. Несобственные интегралы второго рода.
21. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.
22. Геометрические и физические приложения определённого интеграла.
23. Теорема о длине дуги кривой. Следствие. Пример: вычисление длины дуги циклоиды.
24. Площадь плоской фигуры и объем тела.
25. Определение меры Жордана. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства меры Жордана.
26. Измеримость спрямляемой кривой. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
27. Геометрические приложения определенного интеграла (Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора. Длина дуги кривой. Площадь поверхности вращения. Объем тела).

**Литература:** [1, с. 106-143]; [2, с. 222-280]; [4, с. 173-228]; [5, ч. 2, с. 164-343]; [6, с. 214-256]; [7, с. 37-61].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Что такое определенный интеграл?
2. Какая связь существует между неопределенным и определенным интегралами?
3. Дайте определение интеграла Римана.
4. Сформулируйте свойство интегрируемых функций.
5. Сформулируйте критерий интегрируемости по Риману функции, ограниченной на отрезке.
6. Перечислите свойства верхних и нижних сумм Дарбу.
7. Докажите специальный критерий интегрируемости функции по Риману.
8. Докажите, что любая непрерывная на отрезке функция является интегрируемой на этом отрезке.
9. Докажите, что любая монотонная на отрезке функция является интегрируемой на этом отрезке.
10. Перечислите свойства интеграла, связанные с интегрируемостью на заданном фиксированном отрезке.
11. Почему формулу Ньютона –Лейбница называют основной теоремой интегрального исчисления?
12. Выведите формулы суммирования Эйлера и Абеля.
13. Докажите теорему о замене переменной при вычислении интегралов.
14. Выведите формулу интегрирования по частям.
15. Сформулируйте теоремы о среднем значении интеграла.
16. Дайте определение понятия множества, имеющего нулевую меру Лебега.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**
**Задача.** Вычислить интеграл различными способами.

**I подзадача.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интеграл $\int_{0}^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x \, dx$.

**II подзадача.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 3$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Вычислить $\int_{0}^{2} \ln\left(x^2 + 4\right) dx$
2. Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4x-2}\, dx$
3. Вычислить $\int_{0}^{\pi} \left(\cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x\right) dx$

**4.** Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 x dx$

**5.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интеграл $\int\limits_{1}^{2} \frac{x+2}{3-x} dx$

**6.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интеграл $\int\limits_{-1}^{0} xe^{-x} dx$

**7.** Используя формулу Ньютона-Лейбница, найти интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{4x-2} dx$

**Тема 9. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных**
**План**

1. Некоторые понятия общей топологии. Метрические пространства.
2. Определение функции двух и более переменных.
3. Геометрическое изображение функции двух переменных.
4. Предел функции двух переменных. Определение непрерывности функции двух переменных.
5. Основные свойства непрерывных функций двух переменных.
6. Частные производные. Понятие дифференцируемости функции. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции. Производные сложных функций.
7. Дифференциал функции. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Геометрический смысл дифференциала.
8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
9. Производные функции, заданной неявно.
10. Частные производные высших порядков.
11. Условие независимости значений смешанных производных от порядка дифференцирования.
12. Дифференциалы высших порядков.
13. Производная по направлению. Градиент.
14. Формула Тейлора для функции многих переменных.
15. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума функции двух переменных. Условный экстремум.
16. Нахождение наибольшего и наименьшего значений в замкнутой ограниченной области.

**Литература:** [1, с. 144-171]; [3, с. 105-137]; [4, с. 295-328]; [5, ч. 3, с. 9-242]; [6, с. 257-288]; [7, с. 171-191].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Дайте определение функции двух переменных.
2. Перечислите способы задания функции двух переменных.
3. Что может быть областью определения функции двух переменных?
4. Дайте определение функции трех переменных.
5. Что может быть областью определения функции трех переменных?
6. Дайте определение окрестности точки.
7. Дайте определение сходящейся последовательности точек.
8. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
9. Сформулируйте определение предела функции двух переменных, используя «$\varepsilon-\delta$» терминологию.
10. Сформулируйте определение непрерывности функции двух переменных.
11. Сформулируйте определение непрерывности функции двух переменных, используя определение предела функции в терминах «$\varepsilon-\delta$».
12. Перечислить основные свойства непрерывных функций двух переменных.
13. Дайте определение частной производной функции $z=f(M)$ в точке $M$ по переменной $x$ (по переменной $y$).
14. Дайте определение дифференцируемости функции.
15. Докажите необходимые условия дифференцируемости.
16. Сформулируйте достаточные условия дифференцируемости функции двух переменных.
17. Дайте определение градиента функции.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача 1.** Дана функция $z=\sqrt{8-|x-8|-|y|}$.

**I подзадача.** Найти область определения данной функции.

**II подзадача.** Найти линии уровня функции $z=\sqrt{8-|x-8|-|y|}$.

**Задача 2.** Дана функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$.

**I подзадача.** Выяснить, имеет ли эта функция предел при $x\to 0,\quad y\to 0$.

**II подзадача.** Выяснить, имеет ли эта функция предел при $x\to\infty,\quad y\to\infty$.

**III подзадача.** Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y)=\dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Найти поверхности уровня функции $y=\sqrt{36-x_1^2-x_2^2-x_3^2}$ и значение функции в точке $P(1,1,3)$.
2. Найти предел функции $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{2x^2y^2}$ при $x\to 0,\quad y\to 0$.
3. Исследовать на непрерывность функции $f(x,y)=\dfrac{\mathbf{sin}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$, $f(x,y)=\mathbf{sin}\left(\dfrac{3}{xy}\right)$.
4. Исследовать на непрерывность функцию $f(x,y,z)=\begin{cases} x^4+\dfrac{2xyz}{y^2+z^2}, y^2+z^2\neq 0 \\ x^4, \qquad\qquad y^2+z^2=0 \end{cases}$.
5. Найти частные производные функций: $z=x^2y^3$, $z=x^5+y^6$, $z=x^y+y^x$, $z=\mathbf{log}_y x$.
6. Найти частные производные функции: $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\mathbf{sin}(xyz)}$.
7. Найти $u''_{xx}$, $u''_{yy}$, $u''_{xy}$, $u''_{yx}$, $u'''_{xyz}$, $u^{IV}_{xy^2z}$, если $u=e^{xyz}$.
8. Найти $df$, если 1) $f(x,y)=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$, 2) $f(x,y)=xy+e^{x+y}+1$.
9. Найти $d^2f$, если 1) $f(x,y)=x^6y^8$, 2) $f(x,y)=x^6+y^8$.
10. Показать, что функция $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-ay^2}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=a\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

**Тема 10. Числовые и функциональные ряды**

**План**

1. Основные определения и свойства сходящихся рядов. Критерий Коши.
2. Числовые ряды.
3. Ряды с неотрицательными членами. Признак Даламбера. Признак Коши. Признак Раабе.
4. Признаки Куммера, Бертрана, Гаусса. Интегральный признак Коши – Маклорена.
5. Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряды Лейбница. Признак Лейбница. Оценка остатка ряда Лейбница. Формула дискретного преобразования Абеля. Признаки Абеля и Дирихле.
6. Перестановки членов ряда. Арифметические операции над сходящимися рядами. Двойные и повторные ряды. Свойства сходящихся рядов и их сумм.
7. Функциональные последовательности и ряды.
8. Разложения различных функций по формуле Тейлора как примеры функциональных рядов.
9. Ряд Тейлора. Равномерная сходимость.
10. Равномерно ограниченные на множестве последовательности.
11. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (критерий Коши и его отрицание).
12. Признаки равномерной сходимости (критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности, определение мажоранты, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле).

13.Теорема Дини и следствие из нее.
14.Почленное дифференцирование и интегрирование ряда.
15.Степенные ряды. Теорема Абеля. Бесконечные произведения.

**Литература:** [1, с. 221-246]; [3, с. 229-273]; [4, с. 368-403]; [5, ч. 3, с. 244-353]; [6, с. 345-393]; [7, с. 128-152].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Сформулируйте утверждение об остаточном члене ряда.
2. Сформулируйте утверждение об отбрасывание любого конечного числа членов ряда
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
4. Докажите критерий Коши для расходимости ряда.
5. Сформулируйте теорема об ограниченности последовательности частичных сумм
6. Докажите признаки сравнения.
7. Докажите признак Даламбера.
8. Докажите признак Раабе.
9. Сформулируйте признаки Куммера, Бертрана, Гаусса.
10. Докажите интегральный признак Коши – Маклорена.
11. Абсолютная и условная сходимость рядов.
12. Выведите формулу дискретного преобразования Абеля.
13. Сформулируйте признаки Абеля и Дирихле.
14. Сформулируйте основные определения о функциональных последовательностях и рядах.
15. Приведите примеры разложения различных функций по формуле Тейлора.
16. Докажите теорему о непрерывности суммы ряда в точке. Равномерно ограниченные на множестве последовательности. Утверждения 1-4.
17. Сформулируйте критерий равномерной сходимости функциональной последовательности (критерий Коши и его отрицание).
18. Сформулируйте признаки равномерной сходимости (критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности, определение мажоранты, признак Вейерштрасса, признаки Абеля и Дирихле).
19. Докажите теорему Дини и следствия из нее.
20. Докажите теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании ряда.
21. Докажите теоремы о степенных рядах.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача.** Показать, что ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

**I подзадача.** Изучить вопрос о сходимости ряда $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

**II подзадача.** Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ сходится.

**III подзадача.** Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s\le 1)$ расходится.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Чему равен пятый член числовой последовательности $\frac{5(n-1)}{n!}$?

2. Установите соответствие между рядами и их названиями.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n^2}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3+n^2}$.

а) знакочередующийся; б) степенной; в) знакоположительный.

3. Укажите сходящиеся числовые ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$.

4. Чему равен коэффициент $a_4$ разложения функции $f(x)=x^3-3$ в ряд по степеням $(x-3)$?

5. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, если его радиус сходимости равен 10.

6. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{5^n}$.

7. Определить область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+1}}$.

**Тема 11. Кратные и криволинейные интегралы**

**План.**

1. Двойной интеграл Римана. Определение и условия существования двойного интеграла.
2. Геометрический смысл двойного интеграла.
3. Суммы Дарбу и их свойства.
4. Критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике.
5. Свойства двойного интеграла.
6. Сведение двойного интеграла к повторному (случаи прямоугольной и криволинейной областей).
7. Замена переменных в двойном интеграле.
8. Геометрические приложения двойных интегралов (вычисление площади фигуры, объема тела и площади поверхности).
9. Физические приложения двойного интеграла (вычисление массы материальной пластинки, вычисление координат центра масс и моментов инерции пластинки).
10. Тройной интеграл Римана. Определение и вычисление тройных интегралов.
11. Основные свойства тройного интеграла.
12. Замена переменных в тройном интеграле.
13. Геометрические и физические приложения тройных интегралов.
14. Определение криволинейного интеграла первого рода.
15. Вычисление криволинейных интегралов первого рода.
16. Определение криволинейных интегралов второго рода, сведение их к определенным интегралам.
17. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода.
18. Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.
19. Свойства криволинейных интегралов. Формула Грина.
20. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
21. Интегрирование полных дифференциалов.
22. Некоторые приложения криволинейных интегралов 1-го и 2-ого рода.

**Литература:** [1, с. 172-191, 192-202]; [3, с. 137-202]; [4, с. 501-553, 554-587]; [5, ч. 4, с. 29-68, 193-205]; [6, с. 289-310, 311-344]; [7, с. 192-242].

**Вопросы для самоконтроля:**

1. Дайте определение двойного интеграла.
2. Сформулируйте условие существования двойного интеграла.
3. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции.
4. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла.
5. Перечислите свойства двойного интеграла.
6. Перечислите способы вычисления двойного интеграла.
7. Перечислите свойства сумм Дарбу.
8. Сформулируйте критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике.
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие интегрируемости функции, ограниченной на прямоугольнике.
10. Сформулируйте теорему о равенстве двойного и повторного интегралов.
11. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
12. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода.
13. В чем состоит связь между криволинейными интегралами первого и второго рода?
14. Сформулируйте теорему, устанавливающую связь между криволинейными и двойными интегралами.
15. Выведите формулу Грина.
16. Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
17. Приведите формулы для вычисления площадей плоских фигур, ограниченных контуром $L$, с помощью формулы Грина.
18. Приведите формулу вычисления работы силы.

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача 1.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dxdy$.

**I подзадача.** Где $\Omega$ – треугольник, образованный прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=3$.

**II подзадача.** Где $\Omega$ – треугольник, образованный прямыми $x=3,\ y=0,\ y=x$.

**III подзадача.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, если область $\Omega$ ограничена линиями:

$x=2,\ y=x,\ x=2y$.

**IV подзадача.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, если область $\Omega$ ограничена линиями:

$2y=x^2,\ y=x$.

**Задача 2.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где $AB$ – часть окружности: $x=a\cos t$,

$y=a\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

**I подзадача.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где $AB$ – дуга параболы $y^2=2x$ от точки

$(0;0)$ до точки $(2;2)$.

**II подзадача.** Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} x^2dx+xydy$,

где $AB$ – четверть окружности: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

**III подзадача.** Вычислить интеграл $\oint\limits_{L}(x+y)\,dy$, где $L$ – контур прямоугольника, образованного

прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Вычислить двукратные интегралы $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3\left(x^2+2xy\right)dy$, $\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_0^{y^2}(x+2y)\,dx$, $\int\limits_0^5 dx\int\limits_0^{5-x}\sqrt{4+x+y}\,dy$.

   Изменить порядок интегрирования.
2. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

   а) $\iint\limits_{\Omega} x^2ydxdy,\ y=0,\ y=\sqrt{2ax-x^2}$

   б) $\iint\limits_{\Omega}\sin(x+y)\,dxdy,\ y=0,\ y=x,\ x+y=\frac{\pi}{2}$

   в) $\iint\limits_{\Omega} x^2(y-x)\,dxdy,\ x=y^2,\ y=x^2$
3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega}(2x+3y+1)\,dxdy$ по области $\Omega$ ограниченной треугольником с вершинами $A(1,3)$, $B(-1,-1)$, $C(2,-4)$.
4. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойные интегралы:

   а) $\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy$, где область $\Omega$ ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

   б) $\iint\limits_{\Omega} e^{-x^2-y^2}dxdy$, где область $\Omega$ – круг $x^2+y^2\le R^2$.
5. Вычислить тройные интегралы:

   а) $\iiint\limits_{\Omega} x^2y^2z^4dxdydz$, где $\Omega=\{(x,y,z):|x|\le 1;|y|\le 2;|z|\le 2\}$.

б) $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$ , где $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

6. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, если плотность в каждой точке равна ее ординате.

7. Вычислить работу силы $\overline{F} = 2xy\overline{i} + x\overline{j}$ при перемещении точки $M$ из положения $A(2, 0)$ в положение $B(-1, 3)$: а) вдоль прямой АВ, б) вдоль ломаной АСВ, где $C(-1, 0)$.

**8.** С помощью формулы Римана-Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy$, где $L$ – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

**9.** Вычислите криволинейные интегралы:

а) $\int\limits_{OA} (x-y)dl$, если путь от $O(0,0)$ до $C(4,3)$ – отрезок прямой.

б) $\int\limits_L xydl$, где $L$ – контур треугольника с вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$.

**10.** Применяя формулу Римана-Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_L y^2dx + (x+y)^2 dy$ по контуру треугольника с вершинами $A(1,0)$, $B(1,1)$ и $C(0,1)$.

**Тема 12. Дифференциальные уравнения**

**План.**
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные определения.
2. Решение простейших дифференциальных уравнений.
3. Линейные дифференциальные уравнения.
4. Дифференциальные уравнения первого порядка и их применение.
5. Уравнения высших порядков.
6. Линейные уравнения второго порядка.
7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Литература:** [1, с. 264-293]; [3, с. 247-290]; [4, с. 506-517]; [9, с. 394-461]; [10, с. 66-95].

**Вопросы для самоконтроля:**
1. Какие уравнения называются дифференциальными?
2. Что называют общим решением дифференциального уравнения?
3. Что значит решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение?
4. В чем состоит операция «разделения» переменных?

**Пример кейс-задания для коллективного решения:**

**Задача 1.** Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

**I подзадача.** Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

**II подзадача.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$.

**III подзадача.** Найти решение задачи Коши $y' - y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$.

**IV подзадача.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

**Задания для самостоятельной работы:**

**1.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

**2.** Решить уравнение $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$

**3.** Найти частный интеграл уравнения $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$, удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

**4.** Найти частное решение д.у. $\left(1+x^2\right)dy + ydx = 0$ при начальном условии $y\left(1\right)=1$.

**5.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = tg\,x\,tg\,y$.

**6.** Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\left(x^2+2xy\right)dx + xydy = 0$

**7.** Решить уравнение $\ln\cos y\;dx + x\;tgy\;dy = 0$

**8.** Найти решение задачи Коши $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0;\quad y\left(1\right)=0$

**9.** Решить уравнение $xy'\sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$.